

MODELOS MATEMÁTICOS DE SIMULACIÓN DE PROCESOS OCEANICOS BÁSICOS: DIFUSIÓN

Manuel Efraín Carbajal Peña
Centro de Investigaciones en Modelaje Oceanográfico y
Biológico Pesquero, Instituto del Mar del Peru, Apdo. 22, Lima, Peru

RESUMEN

Se presentan modelos matemáticos del proceso oceánico básico de difusión. La ecuación de difusión es resuelta en forma analítica y numérica, mediante el algoritmo FTCS. Se establecen las condiciones de estabilidad numérica y se comparan las simulaciones variando los parámetros del modelo.

ABSTRACT

Mathematical models of the basic oceanic process of diffusion are presented. The diffusion equation is solved both analytically and numerically, through the FTCS algorithm. Numerical stability conditions are established and simulations are compared varying model parameters.

1. INTRODUCCION

Justificación

Los modelos numéricos que describen los procesos básicos, están basados en un sistema de ecuaciones hidro-termodinámico, que incorpora la Ley de Conservación del Momento, Masa y Energía. Estas ecuaciones pueden derivarse en un sistema de coordenadas cartesianas o esféricas.

La ecuación para la Conservación del Momento puede escribirse como una ecuación de la velocidad. Esta ecuación de la velocidad es función de la densidad de la energía acoplada al término de la presión, por lo que se deben resolver las dos ecuaciones simultáneamente. El conjunto de estas ecuaciones se denomina ecuaciones de Navier-Stockes. Por diversas razones analíticas y prácticas, estas ecuaciones generalmente no se resuelven en forma total sino mediante numerosas pequeñas aproximaciones cuya forma exacta depende de la naturaleza del problema en estudio.

En numerosos modelos de simulación oceanográfica (POM, ROMS, OPA) se utiliza el mecanismo de acoplar diferentes esquemas simples. Por tal motivo, es importante conocer el comportamiento de cada proceso oceánico básico, para comprender el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones integradas.

Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son:

- i) Elaborar modelos de simulación de procesos oceánicos simples, como la difusión turbulenta.
- ii) Comparar las soluciones de los modelos usando técnicas analíticas y numéricas para la simulación del proceso.
- iii) Analizar las condiciones de estabilidad numérica bajo las cuales los modelos reproducen adecuadamente el proceso.
- iv) Realizar un análisis de sensibilidad de los principales parámetros del modelo.
- v) Realizar una simulación con condiciones iniciales con datos reales

2. MATERIALES Y METODOS

El proceso oceánico básico que se trata de simular es el de la difusión turbulenta. La ecuación de Navier-Stockes para este problema es (Quartepelle 1993):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

Donde:

κ es el coeficiente de difusión

$u = u(x, t)$ es la variable de estado (temperatura, salinidad, etc.).

En forma esquemática estas ecuaciones en una dimensión son de la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot F(p)$$

Donde:

p , es el vector de las cantidades que se conservan:

$$p = \begin{pmatrix} \text{densidad de masa} \\ \text{momento de densidad} \\ \text{energía de la densidad} \end{pmatrix}$$

$F(p)$ es la función vectorial de los correspondientes flujos:

$$F(p) = \begin{pmatrix} \text{flujo de masa} \\ \text{flujo de momentos} \\ \text{flujo de energía} \end{pmatrix}$$

Las simulaciones se realizaron elaborando programas en lenguaje MATLAB (Nakamura 1997).

3. RESULTADOS Y DISCUSION

Simulación mediante un modelo analítico

Para comparar la solución analítica y numérica se definirá como condición inicial el sembrado de una sustancia con una concentración igual a 1 en el punto central de un canal de longitud 1. Partiendo de la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

con la condición inicial:

$$\begin{cases} u(x_i, 0) = 1/h, & \text{si } i = (N-1)/2 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

La solución analítica es:

$$u(x,t) = \exp(-x^2 / 4 t) / (2\sqrt{\pi t})$$

Con esta función se simula el proceso de difusión en el tiempo. La Fig. 1 muestra la distribución espacial de la concentración de la sustancia en diferentes instantes de tiempo: $t = 0.006$, $t = 0.02$, $t = 0.01$ y $t = 0.05$. La Fig. 2 muestra que conforme aumenta la distribución espacial se va haciendo de leptocúrtica a más platicúrtica. Se puede observar también, que para valores de t pequeños, los puntos cercanos al origen son los que contribuyen significativamente.

Figura 1: Simulación de la difusión de una sustancia en diferentes instantes de tiempo.

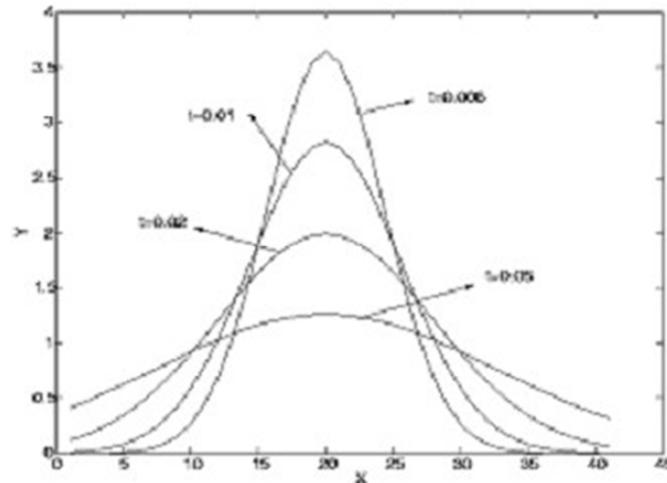
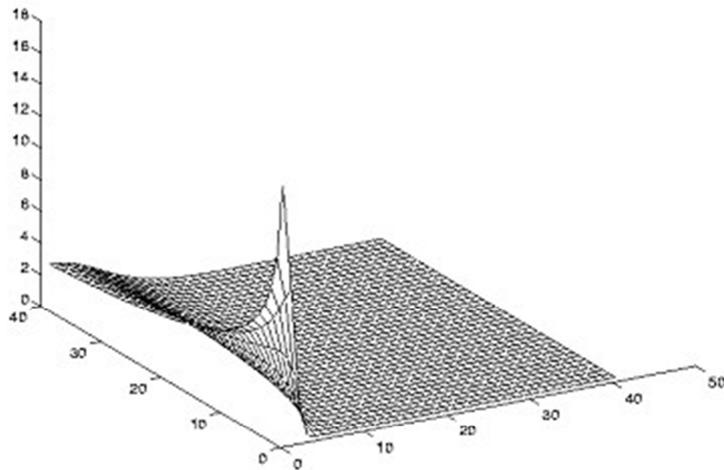


Figura 2: simulación de la distribución espacial de la sustancia en tres dimensiones.



Simulación mediante un modelo numérico

Una alternativa a la solución analítica de la ecuación de difusión, es la integración numérica. La discretización de la ecuación inicial se va a realizar mediante el esquema explícito denominado FTCS, que tiene primer orden de aproximación en el tiempo y segundo orden en el espacio, y que es el más comúnmente utilizado en diversos esquemas de simulación.

$$u_{ij+1} = \mu u_{i-1j} + (1 - 2\mu)u_{ij} + \mu u_{i+1j}$$

Donde $\mu = \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

La condición de estabilidad CFL (Von Neumann) para este algoritmo es (Kowalik y Murty 1993):

$$0 \leq \frac{2\kappa\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\tau\Delta x/2) \leq 1 \quad (2)$$

De esta expresión, es inmediato concluir que para Δt y Δx fijos, el aumento del coeficiente de difusión será la causa de inestabilidad del algoritmo. El término trigonométrico en esta expresión juega un papel similar, pero no tan fuerte, pues depende de la longitud de onda de la señal. Una longitud de onda corta por ejemplo $L = 2h$ convierte al argumento de la función trigonométrica en $\pi/2 = \pi/2$ por lo tanto $\sin(\pi/2) = 1$. Puesto que las ondas de longitud de onda grandes se relaciona con los valores más pequeños de la función trigonométrica, se concluye de (2) que una pequeña onda es una posible región de inestabilidad.

En conclusión, además de los requerimientos numéricos, la física del proceso también puede causar inestabilidad del esquema.

Se consideran las siguientes condiciones para la discretización:

$$N = 41; \quad h = 1/40 = dx$$

Con la elección de h , para que el algoritmo sea estable, el tamaño de dt queda restringido por la condición de Von Neumann, esto es:

$$dt \leq 1/2(dx)^2 = 3.125 \times 10^{-4} = 0.0003125$$

evidentemente una restricción muy severa.

La simulación del proceso de difusión mejoró al reducir el paso de tiempo dt . Cuando $dt = 0.0003125$, valor máximo permitido, luego de 19 iteraciones, se observan errores numéricos (Fig. 3 a). Cuando $dt = 0.0003$, un valor muy cercano al máximo permitido, luego de 20 iteraciones para $t = 0.006$ se observa una reducción de los errores numéricos (Fig. 3 b). Cuando $dt = 0.0002$, un valor moderadamente menor que el máximo teórico, luego de 30 iteraciones para $t = 0.006$, los errores numéricos son eliminados (Fig. 4a). Cuando $dt = 0.00006$, un valor significativamente menor que el máximo teórico, luego de 100 iteraciones para $t = 0.006$, se obtiene una simulación similar al modelo analítico (Fig. 4b).

Figura 3: Simulación de la difusión mediante el modelo numérico para a) $dt = 0.0003125$ y b) $dt = 0.0003$.

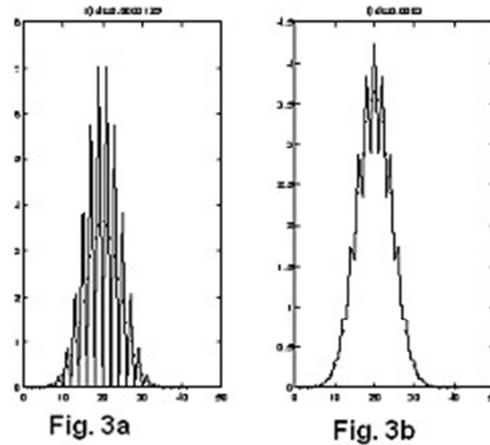
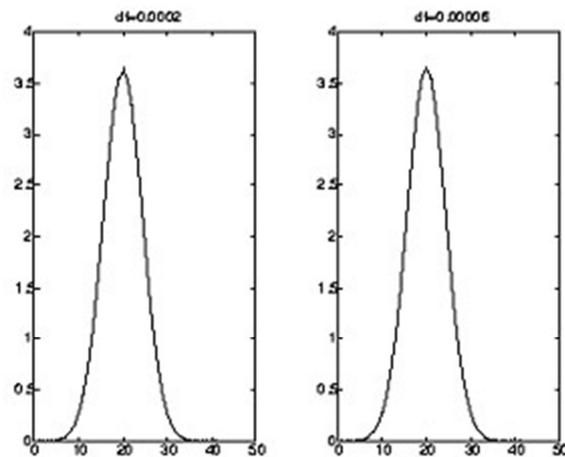


Figura 4: Simulación de la difusión mediante el modelo numérico para $\nu=0.0002$ y $\nu=0.00006$.



Simulación con condiciones iniciales con datos reales

Se consideró como condición inicial datos reales de la distribución latitudinal de la temperatura desde los $3^{\circ}44'80''$ S - $10^{\circ}56'10''$ S (Morón y Sarmiento 2000).

Como condición de frontera, se considera en el extremo ecuatorial el valor de la mayor temperatura, en el primer instante, y en los tiempos posteriores se toma el primer valor adyacente calculado, $u(x_2)$, mientras que en el extremo polar se toma el penúltimo valor

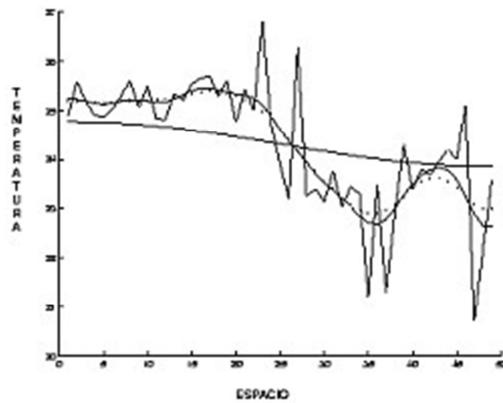
adyacente calculado $u(x_{N-1})$. Esto permite que el valor de la condición de frontera sea variable en el tiempo.

Se considera como coeficiente de difusión turbulenta un valor $1,500 \text{ m}^2/\text{seg}^{-1}$. (Carbonel 1983).

Se establece $\Delta x = 9,250 \text{ m}$ esto es el intervalo $[555000, 999000]$ queda dividido en 49 segmentos, y $\Delta t = 3600 \text{ seg}$, esto es una hora como intervalo de tiempo. Con estos parámetros, el coeficiente CFL será 0.0631, que evidentemente satisface la condición de estabilidad de Von Neumann.

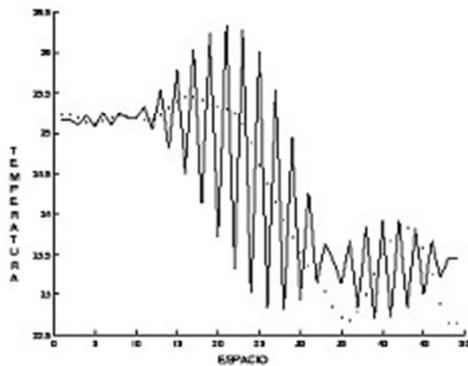
Se realizó la simulación de la difusión a diferentes instantes de tiempo. A 36 horas se observa una suavización de las temperaturas iniciales, y a 3,600 horas se observa una homogenización de las temperaturas, por difusión turbulenta (Fig. 5).

Figura 5: Condición inicial con datos reales y simulación con el modelo numérico de difusión a 36 horas y a 3,600 horas



Cuando se viola la condición de estabilidad del algoritmo, que es $l < 1/2$, se observa amplificación de los errores numéricos (Fig. 6). En la elección del valor para el paso de tiempo (Δt) debe considerarse el esfuerzo de procesamiento computacional. Para cada paso de tiempo Δt , se deben efectuar 5,000 iteraciones y como hay 40 puntos, se deben calcular los valores en 200,000 puntos.

Figura 6: Simulación de la difusión violando la condición de estabilidad



4. CONCLUSIONES

El proceso de difusión es simulado eficientemente mediante técnicas numéricas, tales como el algoritmo FTCS.

El valor de Δt tiene que elegirse, siempre menor que el máximo permitido por la condición de estabilidad de Von Neumann. En la elección del tamaño de Δt , debe considerarse también el esfuerzo computacional que demanda dicha elección.

El coeficiente de difusión turbulenta influye en la sensibilidad de las simulaciones, por lo que se sugiere realizar experimentos de campo para su estimación.

El modelo simuló la difusión turbulenta del gradiente latitudinal de las temperaturas, observándose una suavización de las temperaturas iniciales a 36 horas y una homogenización de las temperaturas a las 3,600 horas.

5. AGRADECIMIENTOS

Se agradece al personal del CIMOBP en especial a la Sra. Odilia Carty y al Tco. Augusto Ingunza por su ayuda en aspectos informáticos y administrativos.

6. BIBLIOGRAFIA

- Carbonel, C. 1983. Modelo numérico de circulación en regiones de afloramiento con aplicación a la costa norte del Perú. IGP. 88 p.
- García, A.L. 1994. Numerical Methods for Physics. Prentice Hall. USA. 368 p.
- Kowalik, Z. and T.S. Murty. 1993. Numerical Modeling of Ocean Dynamics. World Scientific. Singapore. 481 p.
- Morón, O. y M. Sarmiento. 2000. Temperatura y salinidad del mar durante el Crucero Pelágico BIC José Olaya Balandra y SNP-2-9911-12. Inf. Inst. Mar Perú. (157): 63-71
- Nakamura, S. 1997. Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab. Prentice Hall. USA. 476 p.
- Quartapelle, L. 1993. Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations. Birkhauser Verlag. Germany. 291 p.

7. ANEXOS

Anexo 1. Datos de temperatura (Morón y Sarmiento 2000) para las condiciones iniciales del modelo de difusión turbulenta. X = distancia al Ecuador, T = temperatura superficial del mar.

X (m)	T (°C)	X (m)	T (°C)	X (m)	T (°C)
555000	24.90	703000	25.71	851000	23.45
564250	25.59	712250	25.29	860250	23.29
573500	25.18	721500	25.61	869500	21.20
582750	24.90	730750	24.75	878750	23.49
592000	24.87	740000	25.44	888000	21.28
601250	25.02	749250	25.00	897250	22.91
610500	25.30	758500	26.80	906500	24.30
619750	25.61	767750	24.69	915750	23.39
629000	25.06	777000	23.90	925000	23.80
638250	25.50	786250	23.17	934250	23.68
647500	24.83	795500	26.29	943500	23.95
656750	24.82	804750	23.24	952750	24.20
666000	25.35	814000	23.40	962000	24.00
675250	25.20	823250	23.13	971250	25.11
684500	25.54	832500	23.77	980500	20.72
693750	25.65	841750	23.02	989750	22.20
				999000	23.59

Anexo 2. Programa computacional en MATLAB para el modelo de difusión turbulenta con condiciones iniciales reales.

